ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1986

OPTION P'

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

L'objet du problème est d'étudier certaines solutions de l'équation différentielle

E $\qquad xy'' + 2y' + \dfrac{x}{y} = 0 \qquad$ où x est une variable réelle.

Toutes les solutions de E *considérées sont à valeurs réelles et ont leur graphe inclus dans le quart de plan défini par les inégalités* $x > 0, y > 0$.

Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre.

I

1. Soit φ une solution de E, définie sur un intervalle *ouvert* $I =]a, b[\subset]0, +\infty[$, et strictement positive.

a. En tout point $x \in I$, exprimer à l'aide de $\varphi(x)$ la valeur de la dérivée $(x^2 \varphi'(x))'$ et trouver son signe.

b. La fonction φ présente-t-elle un minimum sur I ?

c. Montrer que φ est monotone sur I ou sur un sous-intervalle $[a', b[$ de même extrémité droite que I.

2. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de E, strictement positives, distinctes l'une de l'autre, et toutes deux définies au moins sur un intervalle $]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$. On suppose qu'il existe un point $x_0 \in]\alpha,\beta[$ tel que $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$.

a. Justifier l'inégalité $\varphi'_1(x_0) \neq \varphi'_2(x_0)$.

b. On choisit par exemple $\varphi'_1(x_0) < \varphi'_2(x_0)$ et on fait l'hypothèse de travail

H : il existe au moins un réel $\xi \in]x_0, \beta[$ tel que $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$.

En notant x_1 la borne inférieure des réels ξ qui vérifient H, exprimer pour tout $x \in [x_0, x_1]$ la différence

$$x^2 \varphi'_2(x) - x^2 \varphi'_1(x)$$

à l'aide de $x_0^2 [\varphi'_2(x_0) - \varphi'_1(x_0)]$ et d'une intégrale où interviennent φ_1 et φ_2. En déduire une comparaison entre $\varphi'_1(x)$ et $\varphi'_2(x)$ puis entre $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. L'hypothèse H est-elle acceptable ?

3. Dans cette question et la suivante, on suppose qu'il existe une solution strictement positive ψ de E définie sur un intervalle $]0, d[$, ayant une limite finie non nulle en 0, et dont le prolongement continu à $[0, d[$, encore noté ψ, est de classe C^2 sur un intervalle *fermé* $[0, c]$ avec $0 < c < d$.

a. Quelle est la valeur de $\psi'(0)$? Quel est le signe de $\psi'(c)$?

b. Soit ψ_1 une solution *maximale* de E, définie sur $]a_1, b_1[\subset]0,+\infty[$ avec $a_1 < c < b_1$ et telle que $\psi_1(c) = \psi(c)$ et $\psi'_1(c) < \psi'(c)$. Vérifier que $a_1 = 0$. Quand x tend vers 0, déterminer le signe de la limite de $x^2 \psi'_1(x) - x^2 \psi'(x)$ et en déduire la limite de ψ'_1. Quelle est la limite de ψ_1 quand x tend vers 0 ?

c. Soit ψ_2 une solution *maximale* de E, définie sur $]a_2, b_2[\subset]0,+\infty[$ avec $a_2 < c < b_2$ et telle que $\psi_2(c) = \psi(c)$ et $\psi'_2(c) > \psi'(c)$. Quel est le signe de $x^2 \psi'_2(x) - x^2 \psi'(x)$ sur $]a_2, c]$? Minorer $x^2 \psi'_2(x)$ au voisinage de a_2 et en déduire que a_2 ne peut être nul. Quelles sont les limites de ψ_2 et de ψ'_2 quand x tend vers a_2 ?

4. En supposant les hypothèses de la question I.3 satisfaites pour $c = 1$, dessiner sur un même schéma les graphes des différentes sortes de solutions strictement positives de E, définies sur $]0,1]$ et passant par le point $(1, \psi(1))$, avec $\psi(1) > 0$.

5. Soit φ une solution positive de E, maximale et définie sur $]a,b[\subset]0,+\infty[$, avec $a < 1 < b$. Pour $\lambda > 0$ fixé, comment déduit-on de φ la solution maximale φ_λ telle que $\varphi_\lambda(\lambda) = \lambda \varphi(1)$ et $\varphi'_\lambda(\lambda) = \varphi'(1)$?

II

L'objet de cette partie est d'établir l'existence et un procédé de calcul d'une solution ψ de E de classe C^2 sur l'intervalle *fermé* $[0,1]$ et ayant au point 1 une valeur $\psi(1) = \eta > 0$ fixée arbitrairement. Dans ces conditions, $\psi'(0) = 0$.

1.a. Pour tout $x \in [0,1]$, exprimer à l'aide d'intégrales contenant chacune la fonction ψ les valeurs de

$$x^2 \psi'(x) - \psi'(1), \qquad x \psi'(x) + \psi(x) - \psi'(1) - \eta, \qquad \psi'(1).$$

b. A toute fonction réelle f définie et continue sur $[0,1]$ on associe la fonction $T(f)$ définie sur $[0,1]$ par

$$T(f)(0) = \int_0^1 (t - t^2) f(t)\, dt$$

et, si $x \in]0,1]$, $\qquad T(f)(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) \int_0^x t^2 f(t)\, dt + \int_x^1 (t - t^2) f(t)\, dt$.

Vérifier l'égalité $\psi = \eta + T\left(\dfrac{1}{\psi}\right)$.

Page 68 1986 École Polytechnique (option P'. Math 1

2.a. Calculer les dérivées $T(f)'(x)$ et $T(f)''(x)$. Combien valent-elles pour $x = 0$? Vérifier que $T(f)$ est de classe C^2 sur l'intervalle fermé [0,1].

b. Montrer que si f est positive ou nulle sur [0,1], $T(f)$ est strictement positive sur [0,1 [, sauf pour un choix particulier de f qu'on précisera. Quelle est la valeur de $T(f)(1)$?

c. Vérifier la linéarité de l'application T ainsi définie de l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions réelles continues sur [0,1] dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions réelles de classe C^2 sur [0,1] et montrer qu'en posant $\| f \| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} | f(x) |$ pour toute $f \in \mathcal{C}$, on a $\| T(f) \| \leqslant \frac{1}{6} \| f \|$.

3. On définit par récurrence une suite de fonctions g_n par $g_0 = \eta$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$g_{n+1} = \eta + T(\frac{1}{g_n}) .$$

a. Vérifier que g_n appartient à $\mathcal{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$ on a $g_{2p} \leqslant g_{2p+1}$ et que les sous-suites $(g_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(g_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont l'une croissante et l'autre décroissante.

c. En déduire que la suite $(g_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur [0,1] vers une fonction réelle qu'on notera g et que la suite $(g_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur [0,1] vers une fonction réelle qu'on notera G.

On admettra sans que la preuve en soit demandée que ces deux convergences sont uniformes sur [0,1].

d. En déduire les égalités

$$g = \eta + T(\frac{1}{G}) \qquad \text{et} \qquad G = \eta + T(\frac{1}{g}) .$$

Les fonctions g et G appartiennent-elles à $\mathcal{E}$?

4. On définit sur [0,1] la fonction u par l'égalité

$$u(x) = x [G(x) - g(x)] .$$

a. Donner les valeurs de $u(0)$, $u(1)$ et $u'(0)$.

b. Exprimer $u''(x)$ à l'aide de $u(x)$, $g(x)$ et $G(x)$.

c. Quelle est la fonction u ? Comment obtient-on la solution ψ de E cherchée au début de cette partie II ?

Note UPS: *La réponse à la question II-4°c) est inconnue ...*